

HÁTTÉRTÉNYEZŐK HATÁSÁNAK VIZSGÁLATA HIERARCHIKUS LINEÁRIS MODELLEKKEL

Tóth Edit* és Székely László**

**MTA – SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport*

***Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar Matematikai és Informatikai Intézet*

A neveléstudományi empirikus kutatásokból származó adatok szerkezete jellemzően hierarchikus. A hierarchia első szintjén általában a tanulók helyezkednek el, ők jelentik a legkisebb elemzési egységet. A tanulók csoportot alkotnak, például osztályokba szerveződnek a hierarchia második szintjén. Az osztályok csoportja az iskola szintjét, a harmadik szintet alkotja, az iskolák iskolakörzetekbe sorolhatók és így tovább folytatható a hierarchizálás. Az oktatási rendszer különböző szintjein megfigyelhető adatok esetenként a pedagógiai jelenségek alacsonyabb rendszerszintjéről származó kumulált adatok lehetnek, például tanulói szinten rendelkezünk az egyén jellemzőit leíró változókkal, amelyek összevonásával a következő szint, az osztályok írhatók le (Csíkos, 2009). Az elemzést a rendszer magasabb szintjein végezve rendelkezhetünk nem összevont adatokkal is, például az alkalmazott pedagógiai módszer, tankönyv. Minden további hierarchizálás esetén minden szinthez rendelhetünk változókat, melyekhez az előbb említett két módon juthatunk: az alacsonyabb szinten lévő adatok aggregálásával vagy közvetlen hozzárendeléssel.

Az aggregálással létrehozott változók (pl. osztályátlag) esetében nagy mennyiségű információ veszhet el, hiszen eltűnnek a csoporton belüli különbségek. Amikor tanulók szintjén végzett elemzés során például azt vizsgáljuk, milyen tényezők határozzák meg a matematikateszten elért eredményt, akkor egyéni szintű és csoportszintű magyarázó változókat is bevonhatunk az elemzésbe. Az egyének szintjén végzett elemzéskor minden tanuló eredményéhez hozzárendeljük a csoportot jellemző változót. Az ilyen változó szempontjából az egy csoportba tartozó tanulók esetében az egyes megfigyelések nem tekinthetők függetlennek (de Leeuw, 2002).

Az összefüggés-vizsgálatok széles körben használt eszköze a (többváltozós) lineáris regresszió. Az eljárás alkalmazásának egyik feltétele az egyes megfigyelések függetlensége (lásd pl. Bolla és Krámlí, 2005). Ha ez egy adott minta esetében nem teljesül, akkor a módszer segítségével kapott értékek a valódiakhoz képest jelentősen torzulhatnak, s a hibás eredményekből levont következtetések félrevezetőek lehetnek. A neveléstudományi kutatásokban a mintavétel egysége általában az osztály, valamint az egy osztályba járó tanulók a háttérváltozók szempontjából jobban hasonlítanak egymásra, mint a teljes mintából véletlenszerűen választott két tanuló, ezért a rájuk vonatkozó megfigyelések nem tekinthetők függetlennek.

E probléma feloldására, a nem független megfigyelésekre alkalmazható regresszió-analízis – a pedagógiában hierarchikus lineáris modellek néven ismert eljárás – bevezetésére az 1970-es években került sor. A módszert folyamatosan pontosítják, használata a társadalomtudományok területén elterjedt mind a keresztmetszeti, mind a longitudinális adatbázisok másodelemzésében (pl. Battistich, Solomon, Dong-il, Watson és Schaps, 1995; Åström és Karlsson, 2007; Xu, 2008; Stewart, 2008). Gyakran alkalmazott elemzési eljárás a pedagógiai hozzáadott érték vizsgálatában (pl. OECD, 2008; Willms és Raudenbush, 1989; Webster és Mendro, 1997). A hierarchikus lineáris modellek fontosságát az is jelzi, hogy az American Educational Research Association (AERA) 2007-es konferenciáján külön Special Interest Group-ot szerveztek e témában. Néhány alkalmazása a magyarországi neveléstudományi kutatásokban is fellelhető (pl. Balázsi és Zempléni, 2004; D. Molnár és Székely, 2010).

A tanulmány célja, hogy példákon keresztül bemutassa a legelemibb hierarchikus lineáris modelleket – az egyszempontos varianciaanalízist véletlen hatásokkal, a regressziót az átlagokkal mint függő változókkal (*regression with means-as-outcomes*), a véletlen együtthatós regressziós modellt (*random-coefficients regression model*), a tengelymetszetek és meredekségek mint függő változók módszert (*intercepts- and slopes-as-outcomes*) – és azok neveléstudományi alkalmazási lehetőségeit. A modelleket a TIMSS 2007-mérés adatainak másodelemzésén keresztül illusztráljuk azt vizsgálva, hogy a magyar tanulók matematikából elért eredményét hogyan befolyásolják a különböző szintekhez tartozó háttérváltozók. A módszertan bemutatására két kutatási kérdést fogalmaztunk meg: (1) Milyen irányba és hogyan befolyásolja a 8. évfolyamos magyarországi tanulók TIMSS 2007-méréseken elért matematikai teljesítményét a szülők iskolai végzettsége és annak a településnek a mérete, ahol az az iskola található, ahova a tanulók járnak? (2) Mennyiben magyarázza a két változó a tanuló teljesítményét? Módszertani szempontból azt vizsgáljuk, milyen különbségek vannak a *közönséges* lineáris regresszió és a *hierarchikus* lineáris modellek alkalmazása között, érintve az alkalmazhatóságot és a belőlük levonható következtetések kvantitatív és kvalitatív jellegét.

A modellek bemutatását szolgáló kutatás módszerei

A kutatás mintája

Az IEA keretében szervezett TIMSS-felméréssorozat 4. és 8. évfolyamos tanulók matematika- és természettudományi tudását méri négyévente. Elemzésünkhöz a 2007-ben 8. évfolyamosok körében lebonyolított TIMSS-mérés matematikateszten elért eredményeit, valamint a méréshez tartozó iskolai és tanulói háttérkérdőívek adatait használtuk fel. Mivel a minta súlyozott, továbbá a pontosabb becslésekhez szükséges a mintavételi eljárásból fakadó hibák figyelembevétele, ezért a leíró statisztikák kiszámításához az IEA International Database Analyzer (IEA IDB Analyzer, IEA, 2005) programot használtuk, ami egy ingyenesen letölthető plug-in az SPSS-programcsomaghoz.

A mérés mintáját 4111 tanuló alkotja, akik 107073 tanulót reprezentálnak. Az elemzés során nem vettük figyelembe azokat az eseteket, amelyeknél hiányoznak vagy a szü-

lők iskolai végzésére, vagy az iskolai háttérkérdőívből a településméretre vonatkozó adatok, így a mintában 132 iskola 3549 tanulója szerepel (91327 főt reprezentálnak). A tanulók átlageredménye a teljes mintán 516,90 pont (szórás: 84,68 pont), a hiányos háttér-adatokkal rendelkező esetek törlése után az átlagteljesítmény 517,61 pont (szórás: 83,84 pont). Mivel a redukció sem a tanulók átlageredményére, sem a szórásra nem volt hatással, a minta súlyozását nem tartottuk szükségesnek.

A vizsgálatba bevont változók

Az elemzéshez a tanulói szinten a szülők legmagasabb iskolai végzettségét leíró ordinális változót¹ használtuk (1. táblázat), értéke megegyezik a két szülő közül a magasabb iskolai végzettséggel rendelkezőhöz tartozó változóértékkel (Foy és Olson, 2008). A változók 1 és 5 közötti értékeket vehetnek fel, az egyes kategóriákat az UNESCO Nemzetközi Standard Oktatási Osztályozási rendszere (ISCED-1997) alapján határozták meg (Balázs, Schumann, Szalay és Szepesi, 2008). A 8 általánosnál alacsonyabb iskolai végzettségű szülőkhöz az 1-es változóérték tartozik, az általános iskolát végzett szülőkhöz a 2-es, a középfokú végzettségű szülőkhöz a 3-as változóértéket rendeltük. Azok a szülők, akik érettségi után valamilyen szakirányú képzésen, tanfolyamon vettek részt, a 4-es, a felsőfokú végzettségű, tehát főiskolát, egyetemet, doktori iskolát végzett szülőkhöz az 5-ös értéket.

1. táblázat. A 8. évfolyamos tanulók száma és aránya a szülők legmagasabb iskolai végzettsége alapján

Kód	A szülők legmagasabb iskolai végzettsége	Gyakoriság (fő)	Arány (%)	Súlyozott gyakoriság (fő)	Súlyozott arány (%)
1.	8 általánosnál alacsonyabb (ISCED1)	21	0,6	725,6	0,8
2.	Általános iskola (ISCED2)	248	7,0	7449,4	8,2
3.	Középfokú végzettség (ISCED3)	1 630	45,9	44332,1	48,5
4.	Érettségi utáni (szak)tanfolyam diploma nélkül (ISCED4)	514	14,5	12628,2	13,8
5.	Diploma egyetem, főiskola (ISCED5)	1 136	32,0	26192,1	28,7
	Összesen	3 549	100,0	91327,4	100,0

A vizsgálat során használt másik változó² az iskola szintjét, esetünkben a második szintet jellemzi. Ezen ordinális változó azt mutatja meg, milyen kategóriába sorolható az a település, ahol az az iskola található, amelyikben a tanuló tanul (2. táblázat). A településeket méretük szerint 6 csoportba sorolták. A TIMSS adatbázisában használt kódok

¹ Mi édesanyád (vagy mostohaanyád vagy nevelőanyád) legmagasabb iskolai végzettsége?

Mi édesapád (vagy mostohaapád vagy nevelőapád) legmagasabb iskolai végzettsége?

² Hányan laknak azon a településen, ahol az Önök iskolája található?

sorrendjét megfordítottuk, így vizsgálatunkban a nagyobb településméretre nagyobb érték tartozik. Korábbi kutatásokból (pl. Csapó, 2002) tudjuk, hogy a magasabb iskolai végzettségű szülők gyermekei, illetve a nagyobb települések iskoláiban a tanulók általában jobb teljesítményt érnek el. Az átkódolás után a regressziós egyenesek meredeksége pozitív lesz, ami tükrözi ezt a tendenciát.

2. táblázat. A 8. évfolyamos tanulók száma és gyakorisága iskolájuk településének mérete szerint

Kód	A szülők legmagasabb iskolai végzettsége	Gyakoriság (fő)	Arány (%)	Súlyozott gyakoriság (fő)	Súlyozott arány (%)
1.	8 általánosnál alacsonyabb (ISCED1)	21	0,6	725,6	0,8
2.	Általános iskola (ISCED2)	248	7,0	7449,4	8,2
3.	Középfokú végzettség (ISCED3)	1 630	45,9	44332,1	48,5
4.	Érettségi utáni (szak) tanfolyam diploma nélkül (ISCED4)	514	14,5	12628,2	13,8
5.	Diploma egyetem, főiskola (ISCED5)	1 136	32,0	26192,1	28,7
	Összesen	3 549	100,0	91327,4	100,0

Bár a két változó ordinális, nem követünk el jelentős hibát, ha az eredményekkel összetettebb statisztikai elemzéseket végzünk, tehát intervallumváltozóknak tekintjük őket (lásd pl. Csapó, 1994). A tanulók tesztpontszáma és a szülők iskolai végzettsége között a korreláció 0,417, a településtípus és a pontszám közötti kapcsolat mértéke 0,247. A tanulók szüleinek iskolai végzettsége és a településtípus között a korreláció mértéke 0,319 (3. táblázat), a két változó közötti kapcsolat nem tekinthető erősnek, azok nem kollineárisak. A korrelációk értékei alapján ezen változókat mint magyarázó változókat vonjuk be az elemzésekbe.

3. táblázat. A teljesítmény összefüggése a szülők iskolai végzettségével és a településmérettel, ahol az iskola

	Szülők legmagasabb iskolai végzettsége	Településméret (iskola)
Teljesítmény	0,417	0,247
Szülők legmagasabb iskolai végzettsége	1	0,319

Megjegyzés: A korrelációs együtthatók $p < 0,01$ szinten szignifikánsak.

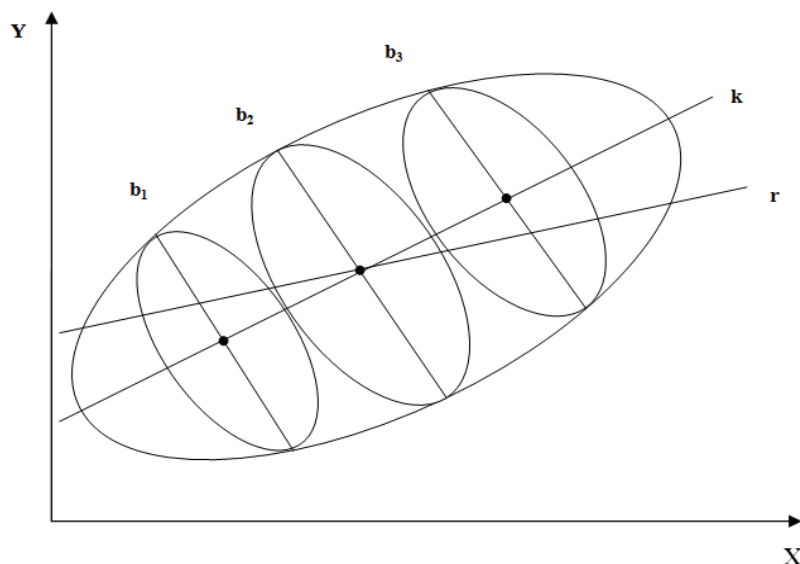
A lineáris regresszió és alkalmazásának korlátai

Célunk a lineáris regresszió és a különböző hierarchikus modellek közötti különbségek bemutatása. A lineáris regresszió alkalmazásának egyik feltétele a megfigyelések függetlensége. A neveléstudományi kutatásokban a mintavétel általában rétegzett, egy-egy iskola vagy osztály a mintavétel egysége. A tanulók, akik egy osztályba, egy iskolába járnak, jobban hasonlítanak egymásra, mint más osztályok, iskolák tanulói, hiszen például ugyanabból a tankönyvből tanulnak, a tanárok hasonló oktatási módszert alkalmaznak a tanítás során, a tanár felkészültsége, tapasztalata is minden tanulót érint. Általában jellemző az is, hogy az egy osztályba járó diákok társadalmi, gazdasági háttere sokkal közelebb áll egymáshoz, mint más, véletlenszerűen kiválasztott tanulókéhoz (Csapó, 2002). Ezek alapján az egyén szintjén a változók általában nem függetlenek.

A módszer – amellet, hogy az alkalmazás feltételének nem teljesülése miatt torz eredményt adhat – az adatok hierarchikus szerveződését sem tudja kezelni, ami információvesztéshez is vezethet, ezáltal a mintavétel egyes rétegei közötti kapcsolat elemzésére sem használható. Ezzel szemben a hierarchikus lineáris modellek minden mintavételi egységre mindegyik mintavételi szinten külön-külön végrehajtanak egy-egy lineáris regressziós eljárást, figyelembe véve az egységeket érő közös hatásokat is.

Az alábbiakban egy három iskolából álló hipotetikus mintán mutatjuk be a két módszer közötti különbségeket. Legyen az Y függő változó egy teszten elért teljesítmény, az X független változó valamilyen háttérváltozó. Tegyük fel, hogy az összetartozó (X, Y) pontpárok pontfelhő-diagramja az 1. ábrán bemutatott szerkezetű, ahol a három kisebb ellipszis egy-egy iskola, a nagyobb ellipszis a teljes minta adatait szemlélteti. Ha csak az egyes iskolákon belül veszünk regressziós egyeneseket (b_1 , b_2 és b_3), azok meredeksége negatív, azaz az iskolákon belül Y és X korrelációja negatív. Most vegyük az egyes osztályok átlagát, ezeket az ábrán $\bullet$ -tal jelöltük, majd erre a három pontra is illesszünk egy egyenest (k). Ennek az egyenesnek a meredeksége már pozitív, azaz az osztályok átlagos Y és átlagos X értékei között a korreláció is pozitív. Ezt az összefüggést az osztályok szintjén történt tanulói szintű információk összevonásával, vagyis csak az osztályok közötti különbségekre hagyatkozva kaptuk.

A hierarchikus lineáris modellek minden mintavételi egységet, minden szintet és azok kapcsolatát is figyelembe veszik. Ezzel szemben a teljes mintán a lineáris regressziós eljárást alkalmazva az r -rel jelölt pozitív meredekségű egyeneshez jutnánk. Ebből az a téves következtetés vonható le, hogy általában nagyobb X -értékhez nagyobb Y -érték tartozik, holott az előzőek alapján ez már iskolákon belül sem volt igaz. A példa is mutatja, hogy rétegzett mintavétel esetén a közönséges lineáris regresszió csak fenntartásokkal alkalmazható.



1. ábra

A lineáris regresszió és a hierarchikus lineáris modellek közötti különbség

Elsőként a többváltozós lineáris regressziós eljárást alkalmazzuk annak megválaszolására, milyen irányba és hogyan befolyásolja a tanulók matematikateszten elért teljesítményét a szülők iskolai végzettsége és az iskola településének mérete. A teszten nyújtott teljesítmény (Y) magyarázatára a két háttérváltozót, a szülők legmagasabb iskolai végzettségét ($SZULOISK$) és az iskola településméretét ($TELTIP$) felhasználva a regressziós egyenes egyenlete

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot SZULOISK_i + \beta_2 \cdot TELTIP_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

ahol $i=1, \dots, 3549$ és ε_i a hibatag. A $SZULOISK$ együttthatójának értéke 31,25, a $TELTIP$ együttthatója 6,95, a tengelymetszeté 383,96. Mivel a két változó minimális értéke 1, ezért a modell alapján egy olyan tanulónak, akinek egyik szülője sem fejezte be az általános iskolát és 3000 főnél kisebb lélekszámú településen jár iskolába, a matematikateszten elért pontszámának várható értéke 422,16. Egy olyan diák esetében, akinek legalább egyik szülője diplomás és Budapesten jár iskolába, a várható teljesítmény 581,91 pont. A regressziós modell által megmagyarázott variancia a teljes variancia 19%-a.

Hierarchikus lineáris modellek

A lineáris regressziós eljárás kiterjesztését nem független megfigyelésekre Lindley és Smith (1972), valamint Smith (1973) oldotta meg. Elképzelésük arra épült, hogy az egy csoportban szereplő egyének jobban hasonlítanak egymáshoz, mint akkor, ha egy másik

csoportbeli egyénhez hasonlítjuk őket, így a különböző csoportokban szereplőkhöz tartozó megfigyelések már függetlennek tekinthetők. Úgy vélték, hogy egy jelenséget leíró összes változót nem lehet megfigyelni, ezért a hiányzók a hibatagokban jeleníthetők meg. Ezek a változók az egy csoporton belüli egyének esetében már nem tekinthetők függetlennek, ezért a hibatagok korrelálni fognak. Annak ellenére, hogy *Lindley* és *Smith* a kovarianciastruktúrát³ matematikai eszközökkel le tudta írni, eljárásuk használhatósága annak hatékony becslését kívánta meg, amihez a megfelelő algoritmusok akkor még nem álltak rendelkezésre.

Dempster, Laird és *Rubin* 1977-ben fejlesztette ki a várható érték maximalizációs (*expectation maximalization*) algoritmust (*Dedrick, Ferron, Hess, Hogarty, Kromrey, Lang, Niles* és *Lee*, 2009), ami meghozta a kívánt áttörést. *Dempster, Rubin* és *Tsutakawa* (1981) mutatta meg, hogy ez az algoritmus alkalmazható hierarchikus adatok kovarianciáinak becslésére. Ezen modellek használata – a gyorsabb számítógépek elérhetővé válásával együtt – egyre több alkalmazott tudományterületen teret hódított más-más elnevezéssel, melyben tükröződik, a módszer mely eleme bír legnagyobb jelentőséggel az adott tudományág számára. A nemzetközi neveléstudományi szakirodalomban a hierarchikus (*hierarchical*) vagy többszintű (*multilevel*) lineáris modellezés elnevezés, a matematikai statisztikai irodalomban a kovariancia komponens-modell (*covariance components model*), a szociológiában a multidimenzionális lineáris modell (*multilevel linear model*), a közgazdaságtanban a random koefficiens modell (*random-coefficient model*) elnevezést használják. A biostatistikában mind a kevert hatások (*mixed-effects models*), mind a véletlen hatások (*random-effects models*) modell elnevezés ezt a statisztikai eljárást jelöli. A módszer elterjedésével párhuzamosan további algoritmusok is születtek a kovarianciastruktúra becslésére. Emellett több, az ilyen modellek illesztésére alkalmas statisztikai programcsomag készült, például a VARCL, a BUGS, a SAS PROC MIXED, a MIXOR, a MLwiN vagy a HLM. Az alkalmazásokban felmerülő újabb kutatási kérdések megkövetelik a hierarchikus lineáris modellek elméletének továbbfejlesztését (*Raudenbush* és *Bryk*, 2002). A továbbiakban néhány alapvető hierarchikus lineáris modell jellemzőit tekintjük át. Elemzéseinkhez a Hierarchical Linear and Nonlinear Modeling (HLM) (*Raudenbush, Bryk, Cheong, Congdon* és *du Toit*, 2004) szoftver 6.0-s verzióját használjuk.

Egyszempontos varianciaanalízis véletlen hatásokkal

A varianciaanalízishez hasonlóan a modell segítségével megadható, mekkora az iskolakon belüli és az iskolák közötti különbségek mértéke. A modell az elemzések során alapmodellnek is tekinthető, mert egy adott változó magyarázóerejének meghatározásához a legtöbb esetben fel kell használnunk az ebből számolt varianciaértékeket is.

Az iskolák számát n jelöli, jelen esetben $n=132$. Egy adott iskola mintában szereplő tanulóinak száma n_j (az alsó indexben szereplő j minden esetben az iskolára vonatkozik).

³ Két változó közötti szisztematikus kapcsolat, melyben az egyik változó értékében bekövetkező változás maga után vonja a másik változó értékének változását.

Minden egyes, a j -edik iskolába járó i -edik tanuló teljesítménye (Y_{ij}) felírható iskolájának teljesítményátlaga (β_{0j}) és a tanuló teljesítményének ezen átlagtól vett eltérésének (r_{ij}), azaz a hibának az összegeként. Ezek alapján a tanulói szint egyenlete

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}. \quad (2)$$

Feltesszük, hogy a hibák iskoláktól függetlenül ugyanolyanok, azaz az r_{ij} értékek ugyanabból a 0 várható értékű és σ^2 szórású normális eloszlásból származnak. Ezzel a feltevessel élünk a varianciaanalízis esetében is (lásd pl. Bolla és Krámlí, 2005). A módszer általánosítható arra az esetre is, amikor ez a feltétel nem teljesül.

Az iskolák átlageredményét, azaz β_{0j} -t felírhatjuk a minta teljes átlaga (γ_{00}) és az attól való eltérésének (u_{0j}) összegeként; ez az összefüggés a második szintű egyenletet adja:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}. \quad (3)$$

A hibatagokra iskolai szinten is hasonló kikötést teszünk, mint a tanulói szint esetében, azaz az u_{0j} értékek egy 0 várható értékű és τ_{00}^2 varianciájú normális eloszlás realizációi. A σ^2 és τ_{00}^2 a hierarchikus lineáris modellek elméletében hagyományosan a belső és a külső variancia jelölésére szolgál. A 4. táblázatban foglaltuk össze az alapmodellből kapott értékeket.

4. táblázat. Az egyutas varianciaanalízis eredményei

Állandó hatások	Együttható	s. e.	t	p
γ_{00}	517,77	4,18	123,83	0,001
Véletlen hatások	Variancia komponens	df	χ^2	p
u_{0j}	2073,80	131	1806,78	0,001
r_{ij}	4884,09	—	—	—

Az országos átlagra – ami a modellben szereplő egyetlen állandó hatás (*fixed effect*), tehát ami nem függ a véletlentől – kapott becslésünk 517,77 pont, s mint regressziós együttható szignifikáns. A két véletlen hatás (*random effect*), azaz a tanulóknak az iskolai, illetve az iskoláknak az országos átlagtól való eltérés varianciái, vagyis a belső és a külső variancia értékei $\sigma^2=4884,09$ és $\tau_{00}^2=2073,80$. Az iskolák közötti és a teljes variancia hányadosaként megkapjuk a csoporton belüli korrelációs együtthatót (*intraclass correlation coefficient*), amit ρ -val jelölünk. Tehát

$$\rho = \frac{\tau_{00}^2}{\sigma^2 + \tau_{00}^2}. \quad (4)$$

Ennek értéke jelen esetben $2073,80/(4884,09+2073,80)=0,298$. Ez a mennyiség a csoporton belüli elemek, azaz a tanulók homogenitásának mértéke. Ez a mutató más kontextusban a hatáserősség mértéke: azt jelöli, hogy a mintaelemek csoportokba sorolása hogyan befolyásolja a mért értékeket (pl. Tóth, Csapó és Székely, 2010).

Ha egy független változó összefüggésben áll a függő változóval, akkor a változót a modellbe építve azt várnánk, hogy az új modell variancia komponensei az ANOVA mo-

delljéhez viszonyítva – amikor nincs független változó egyik szinten sem – csökkennének, hiszen pontosan a hiányzó variancia lenne az, amit az adott változó megmagyaráz. Azonban ez, a későbbiekben bemutatott példa alapján nem teljesül. Előfordulhat, hogy egy újabb változóval a variancia növekszik. Azt, hogy a variancia hány százalékát magyarázza meg a független változó, minden egyes bemutatott modell esetében külön részletezzük. A problémakör általános tárgyalását lásd például *Snijders és Bosker (1999)*, illetve *Hox (2002)* könyvében.

Független változók transzformálása

A független változók transzferálásának célja az elemzésekből kapott eredmények könnyebb értelmezhetőségének támogatása (*Schwippert, 2008*). A független változót módosíthatjuk úgy, hogy minden értékéből kivonjuk a változó minimumát, így a legkisebb értéke 0 lesz. Ekkor a regressziós egyenes tengelymetszete pontosan a változó legkisebb értékéhez tartozó függvényérték. Például a szülők iskolai végzettségét jellemző változót úgy módosíthatjuk, hogy minden értéket 1-gyel csökkentünk, ekkor a 0 érték jelenti azt, hogy egyik szülő sem fejezte be általános iskolai tanulmányait. Ekkor a regressziós egyenes tengelymetszete azt mutatja, várhatóan mennyi a teszten elért pontszám a legalacsonyabb iskolai végzettségű szülőkkel rendelkező tanulóknak. Szintén bevett gyakorlat – amit elsőként *Cronbach (1976)*, illetve *Cronbach és Webb (1979)* javasolt – az X független változó eltolása úgy, hogy az $X=0$ az adott iskola egy átlagos tanulója (*group mean centering*) vagy a teljes minta átlagos tanulója (*grand mean centering*) jelenti. Erre azért lehet szükség, mert egy diák teljesítménye függhet a környezetében lévő diákok teljesítményétől is: egy közepes tanuló sok kiváló tanuló között motivációs problémák miatt rosszul is teljesíthet, míg ugyanez a tanuló egy gyengébb tanulókból álló osztályban akár ki is emelkedhet (*Hox, 2002*). *Raudenbush és Bryk (2002)* mutatott rá arra, hogy az osztályszintű független változók esetében is fontos lehet a teljes minta átlagához igazodni, mivel ennek hiányában – bizonyos esetekben – a közelítő algoritmusok nem konvergálnak.

Regresszió az átlagokkal mint függő változókkal

Ezen hierarchikus modellel azt tekintjük át, miként vizsgálható az, hogyan hat az iskola szintjén bevezetett független változó a tanulók teljesítményére mint függő változóra. A tanulók teljesítményét, akárcsak az ANOVA-modell esetében, most is az iskolájuk átlaga és a tanulók teljesítményének átlagtól vett eltérésének összegeként írjuk fel:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}. \quad (5)$$

A második szinten az iskolák átlagai közötti különbség magyarázatára egy független változót alkalmazunk: annak a településnek a méretét, ahol az adott, j -edik iskola helyezkedik el ($TELTIP_j$).

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot TELTIP_j + u_{0j}. \quad (6)$$

A független változót intervallumváltozónak tekintjük, a kapott eredmények értelmezésének megkönnyítése érdekében a változó értékeinek 1-gyel, azaz a változó minimum-

mával való eltolását hajtottuk végre. Az iskolai szintű egyenletet a tanulói szintűbe helyettesítve kapjuk a kevert (*mixed*) egyenletet.

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot TELTIP_j + u_{0j} + r_{ij}. \quad (7)$$

Ezen egyenlet és a lineáris regresszió (1) egyenlete közötti különbség az, hogy az előbbi a belső és a külső hibatagokat külön kezeli, míg az utóbbi csak a két tag összegével képes dolgozni.

Mindkét regressziós együttható, továbbá az iskolák közötti különbség is szignifikáns (5. táblázat). A tengelymetszet (γ_{00}) értékére a 490,83 becslést kaptuk, ami alapján egy 1-essel kódolt, azaz legfeljebb 3000 fős településen tanuló diák teljesítményének várható értéke 490,83 pont. A meredekség (γ_{01}) értéke 13,32, azaz a településtípusban történő egységnyi változás várhatóan 13,32 pontnyi változást von maga után a tanulók eredményében. Ebből adódóan egy Budapesten tanuló diák a felmérésben várhatóan 66 ponttal teljesít jobban, mint a 3000 lakosú vagy annál kisebb települések iskoláiba járó társaik.

5. táblázat. A regresszió az átlagokkal mint függő változókkal modellből kapott becslések

Állandó hatások	Együttható	s. e.	t	p
γ_{00}	490,83	5,73	85,71	0,001
γ_{01}	13,32	2,66	5,01	0,001
Véletlen hatások	Varianciakomponens	df	χ^2	p
u_{0j}	1675,40	130	1454,19	0,001
r_{ij}	4883,46	–	–	–

Azt, hogy a településtípus a külső variancia hány százalékát magyarázza, úgy számoljuk ki, hogy vesszük az ANOVA-modellből és a szóban forgó modellből számolt iskolai szintű – azaz a csoportok közötti – varianciák különbségét, és elosztjuk az előbbi varianciájával (*Raudenbush és Bryk, 2002*)

$$\frac{\tau^2(ANOVA) - \tau^2}{\tau^2(ANOVA)} = 1 - \frac{\tau^2}{\tau^2(ANOVA)}. \quad (8)$$

Ez a mennyiség a külső variancia relatív csökkenése, vagyis a településtípus a modell alapján 19,2%-át ($1 - 1675,40/2073,80 = 0,192$) magyarázza a külső varianciának. A teljes variancia relatív csökkenése adja meg, hogy a településtípus milyen mértékben határozza meg a tanulók teszten elért teljesítményét:

$$1 - \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sigma^2(ANOVA) + \tau^2(ANOVA)}. \quad (9)$$

Jelen esetben a magyarázóerő $1 - (4883,46 + 1675,40) / (4883,46 + 2073,80) = 0,0573$, azaz 5,73%. A *közönséges* regressziós eljárás alkalmazásával ezen változó magyarázóereje a pontszámmal vett korrelációs együttható négyzete: 6,10% ($0,247^2 = 0,061$). Jelen hierar-

chikus modellel közel 7%-kal pontosabb becslést adtunk⁴ a megmagyarázott variancia nagyságára.

Az iskolai szintű változóra kiszámítható a feltételes, csoporton belüli korrelációs együttható (*conditional intraclass correlation*), ami azt mutatja meg, hogyan aránylik a változó által meg nem magyarázott külső variancia a modellből kapott teljes varianciához. A (4) képletet alkalmazva ennek értéke $1675,40/(4883,46+1675,40)=0,255$. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a településtípus hatását kiküszöböljük, akkor a csoportokba sorolásnak a hatása a teljesítményre 0,298-ról 0,255-re mérséklődik.

Véletlen együtthatós regressziós modell

Ebben a modellben azt vizsgáljuk, hogyan hat a teszten mutatott teljesítményre egy, a tanulók szintjén bevezetett független változó, jelen esetben a szülők legmagasabb iskolai végzettsége (*SZULOISK*). Mivel ezt a változót szintén intervallumváltozónak tekintjük, ezért – hasonlóan az előző modellhez – a változó értékeinek csak annak minimumával, vagyis 1-gyel való eltolását hajtottuk végre. A diákok szintjéhez tartozó egyenlet a következő:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot SZULOISK_{ij} + r_{ij}, \quad (10)$$

ahol $SZULOISK_{ij}$ a j -edik iskola i -edik diák szüleinek legmagasabb iskolai végzettsége, valamint β_{1j} az adott iskolához tartozó regressziós egyenes meredeksége. Az iskolák szintjén az adott iskola regressziós egyenesének tengelymetszetét (β_{0j}) – az adott iskola egy, az általános iskolát be nem fejező szülővel rendelkező, akár hipotetikus tanulójának teljesítménye – az iskolák regressziós egyenesének, azok tengelymetszeteinek átlagával (γ_{00}), illetve e kettő eltéréseivel jellemezzük. Hasonlóan járunk el a meredekség esetében is, azaz

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}, \quad (11)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}. \quad (12)$$

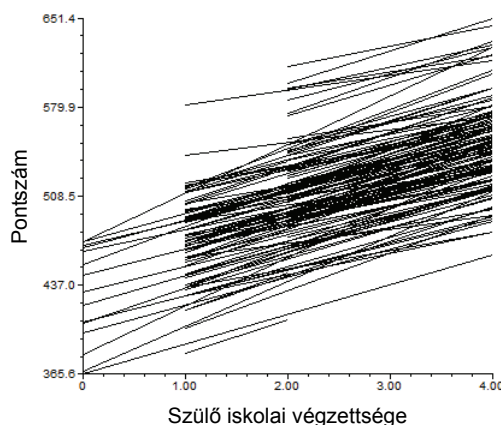
Utóbbi egyenleteket (10)-be behelyettesítve megkapjuk a modellt leíró kevert egyenletet:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + (\gamma_{10} + u_{1j}) \cdot SZULOISK_{ij} + r_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot SZULOISK_{ij} + u_{0j} + u_{1j} \cdot SZULOISK_{ij} + r_{ij} \quad (13)$$

A közönséges regresszióhoz képest ebben az esetben már a hibatag is függ a *SZULOISK* változótól, ami a változó és az iskola közötti véletlen hatásnak is tekinthető.

Az egyes iskolákhoz tartozó pontpárookra illesztett regressziós egyeneseket a 2. ábrán szemléltetjük. Az átlagos tengelymetszet, azaz az iskolák közötti különbség, az iskolákhoz tartozó átlagos regressziós együttható (γ_{10}) és az azok közötti különbség egyaránt szignifikáns (6. táblázat). Azon tanulóknak, akiknek egyik szülője sem fejezte be az általános iskolát, a teszten elért várható értéke 459, míg a szülők végzettségében történő egységnyi változás várhatóan 22,65 pontnyi különbséget okoz a teljesítményben. Azok a diákok, akiknek legalább az egyik szülője felsőfokú végzettséggel rendelkezik, várhatóan 549,60 pontot szereznek a teszten.

⁴ Ez az érték megegyezik a mérés relatív hibájával, azaz $|(0,0573-0,061)/0,0573|$.



2. ábra

Az iskolák regressziós egyenesei a véletlen együtthatós modell esetében

6. táblázat. A véletlen együtthatós regressziós modellből kapott becslések

<i>Állandó hatások</i>	<i>Együttható</i>	<i>s. e.</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
γ_{00}	459,03	5,75	79,85	0,001
γ_{10}	22,65	1,66	13,65	0,001
<i>Véletlen hatások</i>	<i>Varianciakomponens</i>	<i>df</i>	χ^2	<i>p</i>
u_{0j}	2218,69	130	334,23	0,001
u_{1j}	99,71	130	200,52	0,001
r_{ij}	4435,51	—	—	—

Annak ellenére, hogy egy független változót építettünk be a modellbe, az iskolák közötti variancia az ANOVA-modellhez képest nem csökkent, hanem nőtt. A belső varianciának az ANOVA-modell értékeihez viszonyított relatív csökkenése adja meg, hány százalékát magyarázza a független változó a belső varianciának:

$$\frac{\sigma^2(ANOVA) - \sigma^2}{\sigma^2(ANOVA)} = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2(ANOVA)} \quad (14)$$

A magyarázóerő $1 - 4435,51/4883,46 = 0,0917$, vagyis 9,17%.

Tengelymetszetek és meredekségek mint függő változók

A tanulmányban bemutatott modellek közül ez a legösszetettebb. Hasonlóan a véletlen együtthatós modellhez, a diákok teljesítményét tanulói szinten a szülők legmagasabb iskolai végzettségével jellemezzük, ezen kívül, ahogy az átlagokkal mint függő változókkal történő regresszió esetében, a településtípust mint iskolai szintű független változót is figyelembe vesszük.

A modellben feltesszük, hogy a településtípustól függ az egyes iskolák átlagteljesítménye, illetve azt is, hogy a településtípus befolyásolja annak módját, ahogy a tanulói szintű független változó, azaz a legmagasabb iskolai végzettség fejti ki hatását a tanulói teljesítményre. Az egyenletek a következő alakot öltik:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot SZULOISK_{ij} + r_{ij}, \quad (15)$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot TELTIP_j + u_{0j}, \quad (16)$$

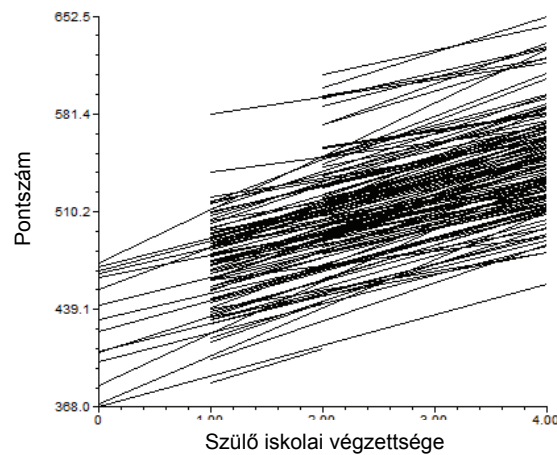
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot TELTIP_j + u_{1j}. \quad (17)$$

Előfordulhat, hogy a két hatás közül csak az egyikre vagyunk kíváncsiak, vagy tudjuk, hogy valamelyik nem áll fenn. Ekkor az adott regressziós együtthatót rögzítettnek tekintjük, illetve az ANOVA-modellben látott véletlen hibát is tartalmazó egyenletre is cserélhetjük. A modellt lefuttatva a γ_{11} együtthatóra, az érték nem szignifikáns ($p=0,163$), azaz a $TELTIP$ változónak nincs hatása arra a módra, ahogy $SZULOISK$ változó hat a teljesítményre. Emiatt a (17) egyenletet a

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j} \quad (18)$$

egyenletre módosítottuk és csak az újabb modellből kapott értékeket közöljük.

A 3. ábrán az egyes iskolák regressziós egyeneseit mutatjuk be, melyek eltérnek a véletlen együtthatós modell esetében kapottakkal (lásd a 2. ábrát). Minden átlagos együttható, továbbá az iskolák és az azokhoz tartozó meredekségek közötti különbségek is szignifikánsak (7. táblázat). Azoknak a diákoknak, akiknek a szülei nem fejezték be az általános iskolát és 3000 főnél kisebb településen lévő iskolában tanulnak, a pontszám várható értéke 442,69. A teljesítmény várhatóan 22,14 ponttal változik, ha a szülők iskolai végzettségében egységnyi változás történik. A településtípus esetében ez az érték 8,61. Egy olyan diák, akinek legalább egyik szülője diplomás és a fővárosban tanul, várhatóan 574,30 pontos teljesítményt nyújtott.



3. ábra

Az iskolák regressziós egyenesei a tengelymetszetek és a meredekségek mint függő változók modell esetében

7. táblázat. A tengelymetszetek és a meredekségek mint függő változók modellből kapott becslések

<i>Állandó hatások</i>	<i>Együttható</i>	<i>s. e.</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
γ_{00}	442,69	3,79	136,41	0,001
γ_{01}	8,61	2,38	3,61	0,001
γ_{10}	22,14	1,64	13,46	0,001
<i>Véletlen hatások</i>	<i>Varianciakomponens</i>	<i>df</i>	χ^2	<i>p</i>
u_{0j}	1898,81	129	303,32	0,001
u_{1j}	95,29	130	199,62	0,001
r_{ij}	4437,33	–	–	–

A településtípus figyelembe vételével a véletlen együtthatós modellhez képest csökkent az iskolák közötti variancia. Azt, hogy ez a változó mennyiben határozza meg a külső varianciát, annak relatív csökkenése adja meg:

$$\frac{\tau_{00}^2(RANDOM) - \tau_{00}^2}{\tau_{00}^2(RANDOM)} = 1 - \frac{\tau_{00}^2}{\tau_{00}^2(RANDOM)}. \quad (19)$$

A megmagyarázott külső variancia $1 - 1898,81/2218,69 = 0,144$, azaz 14,4%. Ebben az esetben nem az ANOVA-, hanem a véletlen együtthatós modellt kell alapmodellnek tekinteni. A modell alapján a teljesítmények közötti különbségek 14,4%-át magyarázza az, milyen típusú településen jár iskolába a tanuló. Hasonló módon határozható meg, hogy az egyes regressziós együtthatók varianciáját mennyiben befolyásolja az iskolai szintű változó.

További lehetőségek, általánosítások

Hasonlóan a közönséges többváltozós regresszióhoz, a hierarchikus lineáris modellek esetében is minden elemzési szinten több független változó is alkalmazható a modellekben. Azt, hogy az azonos szintén lévő változók közül melyik a meghatározóbb, a hozzájuk tartozó regressziós együtthatók nagysága és a statisztikai próbák döntik el (Raudenbush és Bryk, 2002). A bemutatott elemzések során a független változókat intervallumváltozóknak tekintettük. Amennyiben a függő változók nominálisak vagy ordinálisak, akkor indikátorváltozókat (*dummy*) szükséges bevezetni ahhoz, hogy alkalmassá tegyük őket a regressziós eljárás alkalmazásához. Kétértékű változó esetén elegendő az egyik esetet 0-nak, a másikat 1-nek választani, például a nem esetén fiú=0, lány=1. Többértékű változó esetén minden egyes értékhez kétértékű változókat rendelünk, például egy-egy változót vezetünk be arra, hogy állami, egyházi vagy alapítványi fenntartású-e az iskola (0=nem, 1=igen).

A függő változóról minden esetben feltételeztük, hogy az folytonos eloszlásból származik. Azonban előfordulhat, hogy olyan esetekben is szükséges a modell alkalmazása, amikor a függő változó nominális, ordinális vagy darabszámot jelöl (Raudenbush és Bryk, 2002). A modell kiterjesztését ezekre az esetekre Hedeker és Gibbons (1994),

Pinheiro és Bates (1995), illetve más módszerekkel *Raudenbush, Yang és Yosef (2000)* végezte el. Ennek alkalmazására példa *Rumberger (1995)* vizsgálata, amely során az iskolából való lemorzsolódást meghatározó faktorokat vizsgálta.

Nem csak kétszintű modellek léteznek: az első szinten álló egyének csoportjai akár tovább is csoportosíthatók, például közigazgatási, földrajzi szempontok szerint, melyekhez szintén rendelhetünk újabb változókat (*de Leeuw, 2002*). *Xue és Meisels (2004)* óvodások tanulási eredményeit vizsgálta úgy, hogy a második szinten az óvodai csoportok, a harmadik szinten az óvodák szerepeltek. *Ilie és Lietz (2010)* 21 ország esetében a TIMSS 2003-mérés adatai alapján egy háromszintű modell segítségével azt elemezte, hogy azok gazdasági helyzete, illetve az iskolák felszereltsége hogyan hat a tanulók matematikai teljesítményére.

Bizonyos esetekben szükség lehet arra, hogy kétféleképpen is csoportosítsuk a tanulókat. Ekkor előfordulhat, hogy az adatok szerkezete nem tisztán hierarchikus abban az értelemben, hogy a kétféle osztályozás során a tanulókat nem feltétlenül ugyanúgy csoportosították (*cross-classified data*). Például ilyen jellegű adatszerkezethez jutunk, ha egy adott településen lévő lakóközrözetek és az iskolák szerint is csoportosítjuk őket (*Raudenbush és Bryk, 2002*). Az ilyen jellegű problémák módszertanát *Raudenbush (1993)* alapozta meg.

Longitudinális vizsgálatok esetén is van lehetőség hierarchikus modellek alkalmazására (*Raudenbush és Bryk, 2002*). A kétszintű modellben az első szinten a tanulók teljesítménye szerepel, amit mint fejlődési görbét a tanuló korának egy függvényével, általában olyan polinommal közelítünk, melynek fokszáma eggyel kisebb, mint a mérési pontok száma. Például abban az esetben, ha a tanulók teljesítményét három alkalommal mérték, akkor a fejlődési görbét az $ax^2 + bx + c$ függvénnyel közelítjük, a feladat az a , b és c paraméterek meghatározása. A második, a tanulói szinten a tanulót jellemző változók szerepelnek. Egy egyszerűbb változata ennek a modellnek, ha a teljesítményt lineáris közelítéssel írjuk le, de az adatok szerkezetéből adódóan is sok esetben sejthető, hogy körülbelül hányadrendű, a maximálisnál kisebb fokszámú polinom alkalmazására van szükség. A modellt tovább általánosíthatjuk azáltal, hogy nemcsak egy, hanem több változó függvényeként közelítjük a teljesítményt, illetve, ha figyelembe vesszük, hogy a tanulók melyik osztályba, iskolába járnak, azaz a modellbe bevezetünk egy harmadik szintet is [(lásd erről részletesen *Raudenbush és Bryk (2002)*].

Hiányzó adatok esetében érdemes látens változós modelleket alkalmazni. Ennek lényege, hogy a hiányos adatokat felhasználva következtetünk a teljes (lehetséges) adatsorra nem megfigyelt (látens) változók segítségével. Ezzel kapcsolatban bővebben lásd *Raudenbush és Bryk (2002)* munkáját. Nem megfigyelt változók analízisére keresztmetzeti kontextusban példaként szolgálnak *Hartig és Höhler (2009a, 2009b)* munkái.

Összegzés

Tanulmányunkban elsősorban az adatok hierarchikus szerveződését figyelembe vevő néhány lineáris modellt ismertettünk egy konkrét példán keresztül, mely a szülők iskolai

végzettsége és a településméret a 2007-es TIMSS mérésen résztvevő 8. évfolyamos tanulók matematika teszten elért teljesítményére gyakorolt befolyásának feltárását célozza. A hierarchikus lineáris modellek alkalmazásának gyakorlati haszna abban áll, hogy kiküszöbölik a lineáris regresszió alkalmazásának korlátait, így a regressziós együtthatókra, illetve a megmagyarázott varianciára a hagyományos módszernél pontosabb becslést adunk. A lineáris regresszió alkalmazásának egyik feltétele az egyes megfigyelések függetlensége, amely feltétel a neveléstudományi kutatásokban ritkán teljesül, a mintavétel egysége általában az osztály, amelynek tagjai a háttérváltozók szempontjából jobban hasonlítanak egymásra, mint a teljes mintából véletlenszerűen választott két tanuló. A hierarchikus lineáris modellek figyelembe veszik a többlépcsős mintavételi eljárás alkalmazását és a tanulók eredményeit külön-külön vizsgálja. Lineáris regresszió esetén a regressziós egyenes aggregált szinten adható csak meg, míg a hierarchikus lineáris modellek érzékenyek a csoporton belüli hatásokra is. Ezek segítségével olyan megközelítéssel is vizsgálni tudtuk a kutatási kérdéseket, amellyel a lineáris regresszió használata esetén nem lett volna lehetséges.

Tanulmányban négy alapmodellt mutattunk be, amelyeket az különbözteti meg egymástól, melyik háttérváltozót vagy változókat vonjuk be az elemzésbe. Alapmodellünk segítségével, mely a (1) véletlen hatásokat is figyelembe vevő egyszempontos varianciaanalízis, az iskolákon belüli és az iskolák közötti különbségek mértékét jellemeztük; ekkor egyetlen háttérváltozó hatását sem vizsgáljuk. Eredményeink alapján a 8. évfolyamos tanulóknak a TIMSS matematika teszten elért teljesítményét közel 30%-ban magyarázza, melyik iskolába járnak. A (2) regressziót az átlagokkal mint függő változókkal leíró modellben azt vizsgáltuk, hogyan befolyásolja a tanulók teljesítményét az iskolai szintű változó, azaz a településméret (annak a településnek a mérete, ahol az az iskola található, ahová a tanuló jár). Ezen modell és a lineáris regresszió közötti különbség az, hogy előbbi a tanulók és az iskolák közötti különbségeket külön-külön, míg utóbbi csak ezek összegét kezeli. A modell alapján a településméret az iskolák közötti variancia 19,2%-át, míg a teljes variancia 5,7%-át magyarázza meg. A (3) véletlen együtthatós regressziós modellel a tanulói szintű független változó, vagyis a szülők iskolai végzettsége teljesítménybefolyásoló szerepét vizsgáltuk. Eredményünk szerint a változó az iskolákon belüli variancia 9,17%-át magyarázza meg. A legösszetettebb eljárás, a (4) tengelymetszetek és meredekségek mint függő változók módszer figyelembe veszi egyrészt azt, hogy az egyes iskolák átlagteljesítménye függhet a településtípustól, másrészt azt, hogy a településtípus befolyásolhatja, ahogy a szülő legmagasabb iskolai végzettsége kifejti hatását a tanulói teljesítményre. Utóbbi hatás vizsgálatunkban nem volt szignifikáns, azaz az adott iskolai végzettségű szülők hatása nem függ attól, milyen típusú településen élnek. Azoknak a diákoknak, akiknek a szülei nem fejezték be az általános iskolát és 3000 főnél kisebb településen lévő iskolában tanulnak, pontszámuk várható értéke közel 443. A teljesítményben várhatóan 22,14 pont különbség mutatkozik, ha a szülők iskolai végzettségében egységnyi változás történik. A településtípus esetében ez az érték 8,61. A modell az iskolák közötti különbség 14,4%-át magyarázza meg.

A hierarchikus adatszerkezet sajátosságainak figyelembe vétele a nemzetközi szakmai közösség munkáiban már az 1970-es évektől jelen van, mára az adatelemzés mindennapos eszközévé vált. Az eljárás alkalmazásával levonható árnyaltabb következteté-

sek miatt tartjuk fontosnak, hogy a sokféle területen használható adatelemzési eljárás is mind gyakrabban jelen legyen a magyarországi kutatók elemzési gyakorlatában.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük a tanulmány lektorának értékes javaslatait, mellyel hozzájárult az elemzések pontosításához. A tanulmány elkészítését a Szegedi Tudományegyetem Oktatásméleti Kutatócsoport „Diagnosztikus mérések fejlesztése” c. TÁMOP 3.1.9/08/01-2009-0001 pályázat támogatta.

Irodalom

- Åström, M. és Karlsson, K.-G. (2007): Using hierarchical linear models to test differences in Swedish results from OECD's PISA 2003: Integrated and subject-specific science education. *NorDiNa - Nordic Studies in Science Education*, 7. 2. sz. 121–131.
- Balázs Ildikó, Schumann Róbert, Szalay Balázs és Szepesi Ildikó (2008): *TIMSS 2007. Összefoglaló jelentés a 4. és 8. évfolyamos tanulók képességeiről matematikából és természettudományból*. Oktatási Hivatal, Budapest.
- Balázs Ildikó és Zempléni András (2004): A hozzátérték-index és a hozzáadott pedagógiai érték számítása a 2003-as kompetenciamérésben. *Új pedagógiai Szemle*, 8. 12. sz. 36–50.
- Battistich, V., Solomon, D., Dong-il, K., Watson, M. és Schaps E. (1995): Schools as Communities, Poverty Levels of Student Populations, and Students' Attitudes, Motives, and Performance: A Multilevel Analysis. *American Educational Research Journal*, 32. 3. sz. 627–658.
- Bolla Marianna és Krámlí András (2005): *Statistikai következtetések elmélete*. TYPOTEX Kiadó, Budapest.
- Cronbach, L. J. (1976): Research in classrooms and schools: formulation of questions, designs and analysis. Kézirat. Stanford Evaluation Consortium.
- Cronbach, L. J. és Webb, N. (1979): Between class and within class effects in a reported aptitude treatment interaction: a reanalysis of a study by G. L. Anderson. *Journal of Educational Psychology*, 67. 717–724.
- Csapó Benő (1994): Középiskolás tanulók véleménye a társadalmi és iskolai változásokról. *Magyar Pedagógia*, 94. 3–4. sz. 207–229.
- Csapó Benő (2002): Az osztályok közötti különbség és a pedagógiai hozzáadott érték. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai műveltség*. Osiris Kiadó, Budapest. 269–297.
- Csikós Csaba (2009): *Mintavétel a kvantitatív pedagógiai kutatásokban*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- Dedrick, R. F., Ferron, J. M., Hess, M. R., Hogarty, K. Y., Kromrey, J. D., Lang, T. R., Niles, J. D. és Lee, R. S. (2009): Multilevel Modeling: A Review of Methodological Issues and Applications. *Review of Educational Research*, 79. 1. sz. 69–102.
- Dempster, A. P., Laird, N. M. és Rubin, D. B. (1977): Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39. 1. sz. 1–38.
- Dempster, A. P., Rubin, D. B. és Tsutakawa, R. K. (1981): Estimation in covariance components models. *Journal of the American Statistical Association*, 76. 341–353.
- D. Molnár Éva és Székely László (2010): The relationship between motivation components and reading competency of Hungarian-speaking children in three countries. A secondary analysis of the PIRLS 2001 and 2006 data. *IERI Monograph Series*, 3. 107–124.
- Foy, P. és Olson, J. F. (2008): *TIMSS 2007. User Guide for the International Database*. Boston College, Chestnut Hill, MA.

- Hartig, J. és Höhler, J. (2009a): Decomposing competences at students and classroom level by multilevel item response models. Előadás: Szeged Workshop on Educational Evaluation. Szeged, 2009. április 27–28.
- Hartig, J. és Höhler, J. (2009b): Multidimensional IRT models for the assessment of competences. *Studies in Educational Evaluation*, **35**. 2–3. sz. 57–63.
- Hedeker, D. és Gibbons, R. D. (1994): A random-effects ordinal regression model for multilevel analysis. *Biometrics*, **50**. 993–994.
- Hox, J. (2002): *Multilevel Analysis. Techniques and Applications*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Mahwah.
- Ilie, S. és Lietz, P. (2010): School quality and student achievement in 21 European countries. The Heyneman-Loxley effect revisited. *IERI Monograph Series*, **3**. 57–84.
- International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (2005): IEA International Database Analyzer (IEA IDB Analyzer), http://www.iea.nl/iea_studies_datasets.html, 2010. június 25-ei megtekintés.
- de Leeuw, J. (2002): Series Editor's Introduction to Hierarchical Linear Models. In: Raudenbush, S. W. és Bryk, A. S. (2002): *Hierarchical Linear Models. Applications and Data Analysis Methods*. Sage Publications, Thousand Oaks. XIX–XXII.
- Lindley, D. V. és Smith, A. F. M. (1972): Bayes estimates for the linear model. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, **34**. 1–41.
- OECD (2008): *Measuring Improvements in Learning Outcomes. Best practices to assess the Value-added of schools*. OECD, Paris.
- Pinheiro, J. és Bates, D. (1995): Approximations to the log-likelihood function in the nonlinear mixed-effects model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **4**. 1. sz. 12–35.
- Raudenbush, S. W. (1993): A crossed random effects model for unbalanced data with applications in cross-sectional and longitudinal research. *Journal of Educational Statistics*, **18**. 4. sz. 321–349.
- Raudenbush, S. W. és Bryk, A. S. (2002): *Hierarchical Linear Models. Applications and Data Analysis Methods*. Sage Publications, Thousand Oaks.
- Raudenbush, S. W., Bryk, A. S., Cheong, Y. F., Congdon, R. és du Toit, M. (2004): *HLM 6: Hierarchical Linear and Nonlinear Modeling*. Scientific Software International, Inc., Lincolnwood.
- Raudenbush, S. W., Yang, M. és Yosef, M. (2000): Maximum Likelihood for hierarchical models via high-order, multivariate Laplace approximation. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **9**. 1. sz. 141–157.
- Rumberger, R.W. (1995): Dropping out of middle-schools: A multilevel analysis of students and schools. *American Educational Research Journal*, **32**. 3. 583–625.
- Schwippert, K. (2008): Using HLM to Analyze PIRLS Data. Előadás. Working with Large Scale Assessment Data. Berlin, 2008. október 6–9. <http://www.iqb.hu-berlin.de/dateien/WwLSAD\Booklet.pdf>, 181–222.
- Smith, A. F. M. (1973): A general Bayesian linear model. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, **35**. 67–75.
- Snijders, T. A. B. és Bosker, R. J. (1999): *Multilevel analysis: An introduction to basic and advanced multilevel modelling*. Sage, London.
- Stewart, E. B. (2008): School Structural Characteristics, Student Effort, Peer Associations, and Parental Involvement: The Influence of School- and Individual-Level Factors on Academic Achievement. *Education and Urban Society*, **40**. 2. sz. 179–204.
- Tóth Edit, Csapó Benő és Székely László (2010): Az iskolák és osztályok közötti különbségek alakulása a magyar iskolarendszerben. Egy longitudinális vizsgálat eredményei. *Közgazdasági Szemle*, **57**. 9. sz. 798–895.
- Xu, J. (2008): Models of Secondary School Students' Interest in Homework: A Multilevel Analysis. *American Educational Research Journal*, **45**. 4. sz. 1180–1205.

- Xue, Y. és J. Meisels, S. J. (2004): Early Literacy Instruction and Learning in Kindergarten: Evidence From the Early Childhood Longitudinal Study - Kindergarten Class of 1998-1999. *American Educational Research Journal*, **41**, 1. sz. 191–229.
- Webster, W. J. és Mendro, R. L. (1997). Dallas value-added accountability system. In: Millman, J. (szerk.): *Grading teachers, grading schools*. Corwin Press, Thousand Oaks. 81–99.
- Willms, J. D. és Raudenbush, S. W. (1989). A longitudinal hierarchical linear model for estimating school effects and their stability. *Journal of Educational Measurement*, **26**, 3. sz. 209–232.

ABSTRACT

EDIT TÓTH AND LÁSZLÓ SZÉKELY: INVESTIGATING THE EFFECTS OF BACKGROUND VARIABLES USING HIERARCHICAL LINEAR MODELS

(Multivariate) linear regression represents a widespread tool of correlation analysis which can only be applied if the separate observations are mutually independent. If this condition is not fulfilled, the results of a linear regression may deviate significantly from the real values. In the case of dependent observations, hierarchical linear models can be applied, which provide a more accurate estimate than linear regression. The special features of hierarchical data structures have been taken into account in international educational research as far back as the 1970s and currently form an everyday part of data analysis. However, in Hungary they are still rarely applied. The aim of this study is to present the most basic hierarchical linear models – One-way ANOVA with Random Effects, Regression with Means-as-Outcomes, the Random Coefficients Regression Model, and Intercepts- and Slopes-as-Outcomes – and their potential educational applications with concrete examples. These models are illustrated through a secondary analysis of the TIMSS 2007 results, with an investigation of the influence of parents' educational attainment and locality size on Hungarian students' performance in mathematics in Year 8, i.e. how much of the variance is explained by these two variables. From a methodological point of view, the investigation focuses on the differences between applications of ordinary linear regression and hierarchical linear models while touching on the applicability of each and the quantitative and qualitative nature of the conclusions to be drawn.

Magyar Pedagógia, **111**. Number 1. 5–23. (2011)

Levelezési cím / Address for correspondence:

Tóth Edit, MTA–SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport, H–6722 Szeged, Petőfi S. sgt. 30–34.

Székely László, Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar Matematikai és Informatikai Intézet, H–2100 Gödöllő, Páter Károly út 1.